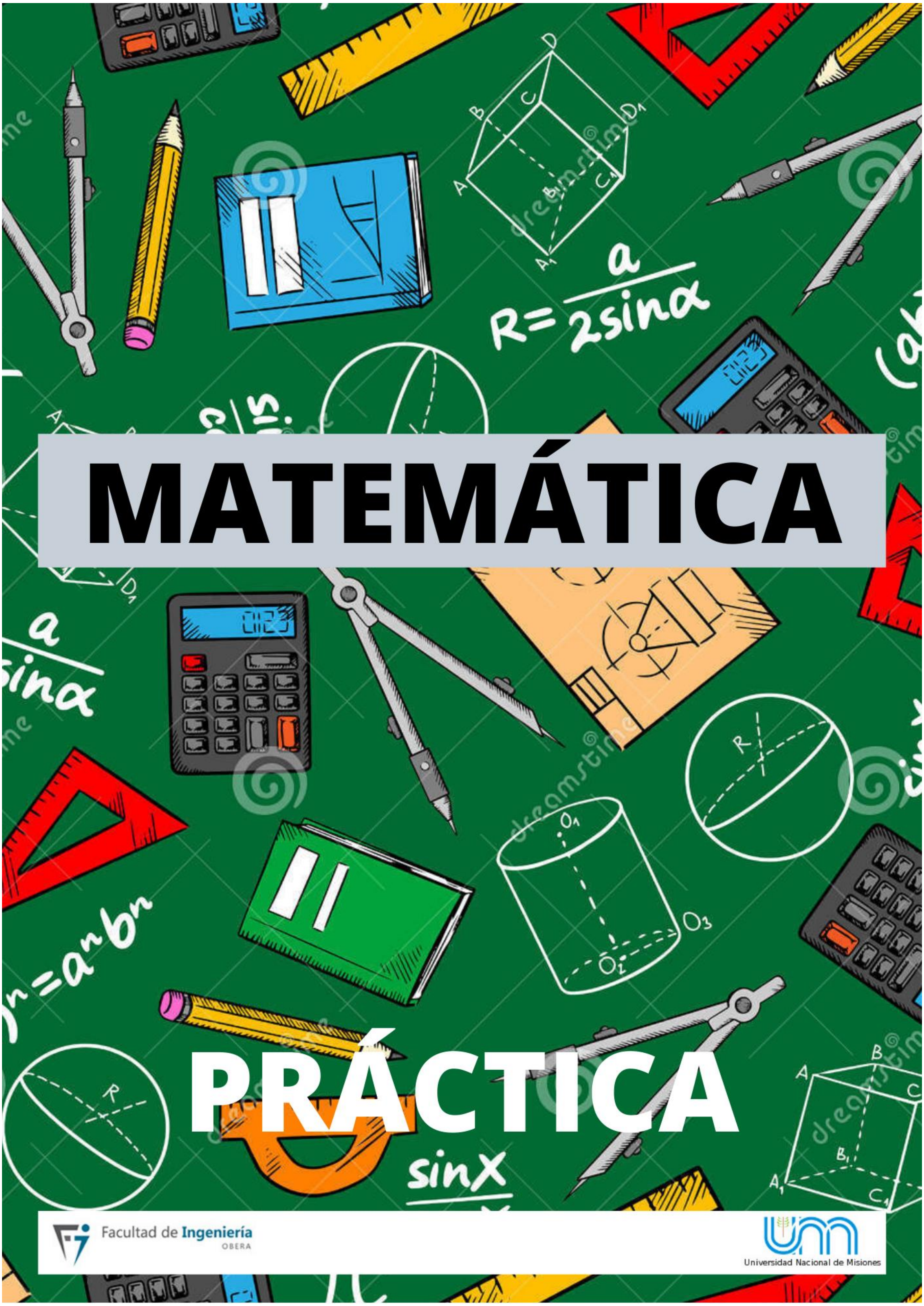


MATEMÁTICA

PRÁCTICA

Facultad de Ingeniería
OBERA

Universidad Nacional de Misiones

1 TRABAJO PRÁCTICO: **CONJUNTOS NUMÉRICOS**

1. Representar los siguientes números en la recta numérica: $\frac{3}{5}\,;-0{,}6\,;\frac{8}{4}\,;\frac{0}{3}\,;-\frac{4}{2}$

2. Ordenar de menor a mayor los números $0{,}\widehat{6}\,;-\frac{8}{5}\,;-\frac{3}{2}\,;0{,}59\,;-1\,;\frac{6}{10}$

Nota: En los ejercicios 1 y 2 es conveniente simplificar las fracciones y pasar todos los números a la misma forma, ya sea decimal o fraccionaria para luego representar u ordenar.
No olvidar que los números periódicos son aquellos en los que se repiten los decimales en forma periódica, por lo que todos los números racionales son periódicos, incluidos los enteros, por ejemplo: 4,12 es en realidad 4,120000000..., 5 es 5,0000000..., pero con los que hay que trabajar más, es con los del tipo 3,14444444...

3. Resolver sin pasar a fracción

a) $(0{,}5 + 2,\widehat{3} - 1,\widehat{1}).10 =$

b) $(-1{,}2\widehat{5} - 3{,}4 + 0,\widehat{1}).100 =$

4. Escribir un cociente de números enteros que tenga como resultado $\frac{0{,}2}{1{,}05}$. ¿Es una fracción decimal? ¿por qué?

5. A veces los números que se utilizan son muy grandes o muy pequeños. Expresa las siguientes cantidades con notación científica.

a. La masa de la Luna es 74.000.000.000.000.000.000 toneladas
b. El tamaño de un virus es 0,000015 mm
c. El número de Avogadro es 602.300.000.000.000.000.000.000
d. El volumen de la pirámide de Keops es 0,00237 km^3

6. Expresa los siguientes números, escritos en notación científica, en notación decimal:

a) $5{,}07\cdot 10^4$ b) $2{,}5\cdot 10^{-3}$ c) $4\cdot 10^{-10}$ d) $3{,}687\cdot 10^9$

7. a) Expresa en notación científica cada una de estas cantidades:

M = 0,000000035126 N = $2836 \cdot 10^{23}$

b) Escribe en forma decimal los siguientes números dados en notación científica:

A = $3{,}87 \cdot 10^9$ B = $2{,}3 \cdot 10^{-6}$

8. Los siguientes números no están escritos correctamente en notación científica. Escríbelos de forma adecuada.

a) $12{,}3\cdot 10^{15}$ b) $0{,}6\cdot 10^{-9}$ c) $325\cdot 10^3$ d) $0{,}002\cdot 10^{-2}$

9. Resolver los siguientes ejercicios combinados:

a) $-2.\left[\left(3^{138}:3^{137}+2\right):5-1\right]+\sqrt[3]{-125}=$

b) $(-2)^{20}.(-2)^{5}:(-2)^{21}+\sqrt[4]{(-3)^{2}.9}-24:\left[2.(-3)-6\right]=$

c) $-2^{2}.(3-5)+2\left[3^{2}-4(-2)+9:(-3)\right]-(-4)^{3}:(-2-6)=$

d) $-\sqrt[3]{-24-3}-(1+5)^{2}-5^{2}+\sqrt{10^{4}}:2=$

e) $(-2)^{2}(-2)(-2)^{3}-(-3)^{6}:(-3)^{3}+\left[(-1)^{3}\right]^{2}=$

f) $(-5)^{7}:(-5)^{3}:(-5)+\left\{\left[(-5)^{2}\right]^{0}\right\}^{4}-(-5)(-5)^{2}=$

g) $\sqrt[4]{2^{3}.2}-\sqrt[5]{(-2)^{6}:(-2)}+\sqrt[3]{(-4)^{2}.(-4)}=$

h) $3+\dfrac{\dfrac{6}{5}:3+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{4}{5}:\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{4}}=$

i) $\sqrt{1-\dfrac{8}{9}}\ (-3)^{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3}:\dfrac{3}{2}=$

j) $\sqrt{\dfrac{1}{16}}\ \sqrt[3]{-27}:\dfrac{3}{4}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}=$

10. Completar el siguiente cuadro:

x	y	z	w	$(x^2+z).y^w$	$y\div z+x.w$	$z^{-1}.y-x$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	-1			
$-0,2$	$1,02$	$1,3$	0			

11. Verificar las igualdades

a) $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{-81}=3\sqrt[3]{-3}$

12. Efectuar los cálculos siguientes, teniendo en cuenta el ejercicio anterior y sin aproximar los números irracionales.

a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{18}=$

b) $\left(\sqrt{8}+3\right)^{2}=$

c) $\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{24}+\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{3}=$

d) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^{2}=$

13. Aplicar las propiedades convenientes para resolver los siguientes ejercicios:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{(-2)^5(-2)}} =$

b) $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{36} =$

c) $\sqrt[3]{2}.\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{108}\right) =$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{0{,}1.10^{-5}}.\sqrt[4]{0{,}1.10^{-5}}} =$

14. Verificar las siguientes igualdades:

a) $\left(a + \sqrt{18}\right)^2 = a^2 + 6.\left(a\sqrt{2} + 3\right)$

b) $\frac{26}{5}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{\frac{2}{125}}$

15. Obtener otra expresión equivalente con denominador racional.

a. $\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ b. $\frac{4}{\sqrt[5]{16}}$ c. $\frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ d. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ e. $\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$

f. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ g. $\frac{2}{\sqrt[3]{7}}$ h. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ i. $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ j. $\frac{\sqrt[5]{2}}{3\sqrt[5]{4}}$ k. $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

16. Indicar en cuáles de las siguientes expresiones no es posible racionalizar el denominador:

a. $\frac{3}{\phi}$, siendo ϕ el número de oro b. $\frac{1}{\pi}$ c. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ d $\frac{-3}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

Nota: racionalizar el denominador significa transformarlo en un número racional.

Sería bueno que investigues sobre el significado del número de oro y sus aplicaciones.

17. Considerar los números $x = 2\sqrt{3}$ e $y = -2 + \sqrt{3}$, realizar los siguientes cálculos y escribir los resultados sin radicales en el denominador:

a. x^{-1} b. y^{-2} c. $y^{-1} - x^{-1}$ d. $(x+y)^{-1}$ e. $x + x^{-1}$

18. Para resolver los siguientes cálculos, racionalizar primero el denominador de cada término.

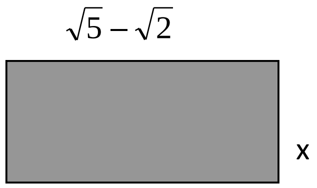
a. $\frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{1-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}+1}$

b. $\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

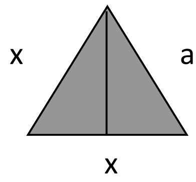
19. Hallar la medida en centímetros del perímetro de un triángulo equilátero de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm. de lado y expresar sin radicales en el denominador.

20. Todas estas figuras tienen área 1. Hallar las incógnitas indicadas con *x*. Expresar todos los resultados sin radicales en el denominador.

a)

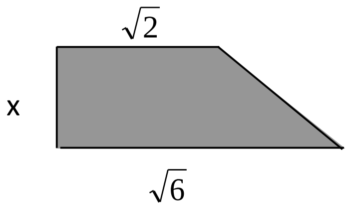


b)



altura del triángulo: $\sqrt[4]{3}$

c)



21. Resolver y, cuando sea posible, simplificar.

a. $\sqrt[5]{5:\sqrt{5}}$ b. $\left(\sqrt[4]{2^{-3}}\right)^2$ c. $\dfrac{10}{\sqrt{\frac{1}{5}.\sqrt[3]{2}}}$ d. $\sqrt{2.\sqrt{8.\sqrt{16}}}$

22. Resolver aplicando las propiedades de la potenciación

a. $2^{\frac{3}{4}} : 2^{\frac{-1}{2}} . \left[2^{\frac{1}{5}} : 2\right]^{\frac{5}{4}}$

b. $\left[0{,}1^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{9}{5}} : 10 : 100^{\frac{-11}{10}}$

23. Expresar en forma de radical las siguientes expresiones:

a) $4^{\frac{1}{3}}$ b) $7^{\frac{-3}{5}}$ c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ d) $0{,}4^{\frac{-1}{3}}$

24. Expresar en forma de potencias los siguientes radicales:

a. $\sqrt[3]{6}$ b. $\sqrt[10]{2^5}$ c. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$ d. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ e. $\sqrt[3]{\sqrt{81}}$ f. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{10^2}}$

25. Expresar las medidas con potencias de exponente racional:

a. El volumen de un cubo de $7\sqrt{7}$ cm. de arista.

b. La diagonal de un cuadrado de $\sqrt[3]{4}$ cm. de perímetro

26. Transformar las siguientes expresiones en potencias de base 3:

a. $9^{\frac{-5}{2}}$ b. $81^{\frac{-3}{4}}$ c. $\frac{1}{\sqrt[5]{81}}$ d. $\frac{1}{\sqrt[3]{243}}$

27. Expresar los radicales como potencias y resolver.

a. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ b. $5.\sqrt[3]{5}:\sqrt{\left(\frac{1}{5}.\sqrt[5]{25}\right)^{\frac{-1}{3}}}$ c. $\left(\sqrt{6}.\sqrt[4]{12}\right)^{3}:18^{\frac{1}{2}}$ d. $\frac{-100^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{10:\sqrt{0,001}}}$

28. Simplificar todo lo posible la expresión: Después, hallar su valor para $x = 0,0001$

$$\left[\left(x^{\frac{-2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}\right]^{\frac{5}{4}}$$

29. Resolver las ecuaciones con módulos

a) $|x+2| = 1$

b) $(x-2)^2 = 1$

c) $x + |-2| = |2|$

d) $|x+4| = |-1|$

e) $|2\cdot(x-3)| = |x-3|$

f) $|-3x| + |x| = 4$

30. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) No existen logaritmos de números negativos

b) Los logaritmos están definidos para bases positivas

c) Las potencias de un número positivo son todas positivas

31. Hallar y verificar los siguientes logaritmos aplicando la definición

a) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) =$

b) $\log_2 \sqrt{2} =$

c) $\log 0,001 =$

d) $\log_{\sqrt{3}} 9 =$

e) $\log_{0,5} 4 =$

f). $\log_8 \sqrt[5]{64} =$

g) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} =$

h) $\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} =$

i) $\log_3 \sqrt[4]{1/9}.81 =$

j) $\log_3 0 =$

k) $2^{\log_2 6} =$

l) $\log_2(4^{0,5}) =$

m) $25^{\log_{25} 8}$

n) $\log_2 2 =$

o). $\log_2 \frac{2^5\sqrt{2^3}}{2^3}$

p) $\log_{1/2} 1/16 =$

q) $\log_{a^2}(a^5) =$

32. i) Sabiendo que log 2 = 0.3 y log 3 = 0.48 calcular sin recurrir a la calculadora

a) log 6		b) log 0,18		c) log $\sqrt[4]{0.00036}$

ii) Sabiendo que log 23 = 1,3617 y log 18 = 1,2553 calcular sin recurrir a la calculadora

a) $\frac{\log 0{,}23}{4}$		b) $\frac{\log 0{,}018}{3}$

iii) Sabiendo que log 2 = 0,301030 calcular sin recurrir a la calculadora

a) $\log\left(\sqrt[3]{2} \div 2^{5}\right) =$		b) $\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}\right) =$

33. Completar con = o ≠ según corresponda en cada caso y justificar:

a. $\log_3 (9 + 3 + 27)$ ....$\log_3 9 + \log_3 3 + \log_3 27$

b. $\log_2 5 + \log_2 8 - \log_2 40$ 0

c. ln 2 + ln 5 ....ln (2. 5)

d. $\log_2 (9 - 5)$ .... $\frac{\log_2 9}{\log_2 5}$

e. $\log_2(32\ \sqrt[5]{4})$ .... $\frac{27}{5}$

f. $\frac{\log 625}{4}$ ....log 5

g. log 98 – log 4...........................log 24.5

34. Indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

a) $(\log_3 4)^{1/2} = \frac{1}{2}\log_3 4$		b) $\log_3 4^{1/2} = \frac{1}{2}\log_3 4$

c) $\log_3(-x) = -\log_3 x$		d) $\log_3 x^{-1} = -\log_3 x$

e) $\frac{\log_3 2}{\log_3 5} = \log_3 2 - \log_3 5$		f) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

g) $3^{\log_3 2} = 3$		h) $3^{\log_3 2} = 2$

35. Resolver sin usar calculadora:

a) $\log_a a^2 - \log_4 (0{,}25)^2 =$		b) $\log_{1/2} 4 + b^{-1} \log_{(a+b)} (a+b)^{3b} =$

c) $\log_5(125^{-1}\cdot 0{,}5)+\log_5 2=$

d) $\log_2(12+4)-\log_2 4+\log_{a^2} a^{-4}=$

e) $\dfrac{\log_{11}(1/11)}{\log_b b^{-2}}-\log_3\sqrt{3}=$

f) $\dfrac{4\log_2 4}{3\log_3 3}\cdot(\log_5 25)^{-1}-\dfrac{1}{3}=$

g) $\log_8 2\cdot\log_2(4+4)+\dfrac{7^{\log_7 x}}{\log_3 3^x}-\ln(e^2)=$

h) $\dfrac{(\log_2 8)^2}{\log_2\sqrt{2}+1/2}=$

i) $\log_3(3a+9)+\log_3\left(\dfrac{a^3}{3+a}\right)+\log_3 a^{-3}=$

j) $\dfrac{\log_2(4+4)-\log_2\left(\dfrac{4}{4}\right)}{\log_2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}}=$

k) $\log_4\dfrac{1}{4}+\log_5(5a)+\dfrac{1}{2}\log_5 a^{-2}+\ln e)=$

$\log_3 27^{\frac{2}{3}}-3\log_{4^3} 4=$

2. TRABAJO PRÁCTICO: **FUNCIONES POLINÓMICAS y PROPORCIONALIDAD**

1. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 4x^3 + x^2 - 2x - 13$ $\qquad Q(x) = 2x^2 + 3x + 9$ $\qquad R(x) = -x^3 + 2$

$S(x) = x - 5$ $\qquad T(x) = 2x^2$

Encontrar:

a) $3Q(x)$
b) $-5S(x)$
c) $P(x) + Q(x)$
d) $Q(x) + R(x)$
e) $S(x).R(x)$
f) $T(x).R(x)$
g) $P(x) + 4R(x)$
h) $Q(x) - P(x)$
i) $T(x).Q(x)$
j) $Q(x).R(x)$
k) $T(x).S(x).R(x)$
l) $\left(S(x)\right)^2$

2. i) Use el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios.

a) $(8x^4 - 8x^2 + 6x + 6) : (2x^2 - x)$
b) $(x^3 - x^2 + 7) : (x - 1)$
c) $(-8x^5 + 10x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 17x + 9) : (2x^2 + 3x + 1)$
d) $(x^3 + 9x^2 - 3x - 1) : (2x - 1)$
e) $(5x + 2x^3 - 3) : (x + 2)$
f) $(x^3 + 4x^2 36x - 2) : (x + 2)$

ii) Verifique cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto. $(P(x) = Q(x).C(x) + R(x))$.

iii) Escribir el resultado de las divisiones dadas teniendo en cuenta que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

3. Se dan los siguientes polinomios

P(x) = $-x^2 - 6x + 4$ $\qquad$ Q(x) = $x - 1$ $\qquad$ R(x) = $x^2 + 6x - 4$ $\qquad$ S(x) = $4 - x^2$

Se pide, obtener mediante operaciones entre los mismos, un polinomio con las características indicadas en cada caso.

a) De dos términos.
b) De grado 3.
c) De grado 5.
d) Nulo.
e) Sea un monomio en "x" con coeficiente positivo.
f) Sea un cuatrinomio de 3er grado.

4. Dadas las siguientes divisiones:

a) $(x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 1):(x - 2)$

b) $(x^5 - 32):(x - 2)$

c) $(-2x^4 + x^2 + 4):(x + 3)$

d) $\left(\frac{1}{8} - x^3\right):\left(x - \frac{1}{2}\right)$

e) $(x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 1):(x + 2)$

i) Utilizar el Teorema del Resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.

ii) Cuando sea posible, factorearlo en término del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

5. Factorear el polinomio $P(x)$ extrayendo como factor común el indicado en cada caso.

i) $P(x) = 4x^5 + 2x^2 - 10x^6 + 20x^3$ a) $\frac{1}{2}x$ b) $4x^2$ c) $5x^4$

6. Teniendo en cuenta que: "Un polinomio $P(x)$ tiene un factor $x - c$, si y sólo si: $P(c) = 0$ (Teorema del factor).

i) Establecer si el binomio dado $x - c$ es un factor del polinomio $P(x)$. Si lo es, factorice $P(x)$

a) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ $x + 1$

b) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ $x - 3$

c) $P(x) = -x^3 + 7x + 6$ $x + 2$

d) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ $x - 1$

ii) Establecer si existe un factor " $x - c$ " para los siguientes binomios. En caso afirmativo, factorizar los binomios dados en término del factor encontrado

a) $x^2 + 4$

b) $x^2 - 4$

c) $x^2 - 1$

d) $\frac{1}{8} - x^3$

e) $2 + x^3$

f) $x^5 - 32$

g) $x^2 - 5$

h) $16x^2 - 9$

i) $2 - x^3$

j) $x^4 - 3$

7. i) Para cada polinomio de *segundo grado*, encontrar los factores $x - c$.

a) $P(x) = -x^2 + 2x - 3x + 6$

b) $P(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $P(x) = 2x^2 - 2x + 4$

d) $P(x) = -x^2$

e) $P(x) = -x^2 + 4$

f) $P(x) = x^2 - 1$

g) $P(x) = x^2 + 4x + 4$

h) $P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$

i) $P(x) = -x^2 - 6x + 9$

i) Factorear los polinomios dados en término de uno de los factores encontrados.

ii) Escribir los polinomios dados como producto de sus factores.

iii) Dar la expresión general de la forma factoreada del polinomio de segundo grado.

8. Factorear utilizando el primer caso de factoreo: Factor común

a) $14m^2n^3 + 16mn^2 - 4n^2$
b) $25x^4 + 10x^3 - 5x^2$
c) $8y^3x^3 + 6y^2 - 12y + 9$
d) $3y^3 + 6y^2 - 12y + 9$
e) $\frac{6}{5}m^5n^4 + \frac{9}{2}m^2n - 12n^4$
f) $\frac{1}{2}x^3x + \frac{3}{2}x^2x^2 - \frac{1}{2}xa^3$

9. Factorear utilizando el segundo caso de factoreo: Factor común en grupos

a) $2ax - ay + 5a + 2bx - by + 5b$
b) $am - an + ax - bn + bm + bx - cm - cx + cn$
c) $\frac{1}{2}a^2x - 2ax^2 + ax - \frac{1}{2}ab + 2bx - b$
d) $15a^2 - 3am - \frac{3}{2}a - 5ax + xm + \frac{1}{2}x$
e) $15mx + 6m - 3my + xy - 2x - 5x^2$
f) $-5x^2y + 10xy^2 - 2mx + 4my$

10. Desarrollar los siguientes cuadrados de binomios

a) $(2x - 3)^2$
b) $\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2$
c) $(x - 2y)^2$
d) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)^2$

11. Factorear utilizando el tercer caso de factoreo

a) $4x^2 - 4x + 1$

b) $9a^2 + 6ab + b^2$

c) $\frac{1}{4}a^2 + ab^2 + b^4$

d) $9x^2 - 24x + 16$

e) $x^2 + x + 0.25$

f) $a + 2\sqrt{ab} + b$

12. Desarrollar los siguientes cubos de binomios:

a) $(3x+2)^3$

b) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^3$

c) $(\sqrt[3]{x}+1)^3$

d) $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^3$

13. Factorear (cuando sea posible) los siguientes polinomios por el cuarto caso:

a) $x^3-6x^2+12x-8$

b) $8x^3+6x+12x^2+1$

c) $x^3+3x^{2y}+3xy^2+y^3$

d) $a^6+6a^4b+12a^2\,b^2+8b^3$

e) $x^3+3\sqrt{2}x^2+6x+2\sqrt{2}$

f) $a^3+9\sqrt{2}a^2+54a+54\sqrt{2}$

14. Factorear los siguientes polinomios por el quinto caso: diferencia de cuadrados.

a) m^2-9n^2

b) $\frac{4}{9}x^2-\frac{9}{4}$

c) $x^2-\frac{16}{49}y^2$

d) $-\frac{4}{9}m^2+1$

e) $y^6z^2-x^4$

15. Factorear los siguientes polinomios por el sexto caso:

a) x^3+1

b) a^3-1

c) x^3-y^3

d) x^5+32

e) $x^3+\frac{1}{27}$

16. Representar gráficamente las siguientes funciones a partir de la ordenada al origen y la pendiente.

a) $y = \frac{1}{2}x$ b) $y = -x + 2$ c) $y = \frac{2}{3}x - 1$ d) $y = -\frac{1}{4}x + 3$

17. Encontrar las coordenadas al origen (corte en x y corte en y) y usarlas para obtener la gráfica de cada una de las rectas siguientes:

a) $x + 2y = 4$

b) $3x + y = 6$

c) $2x + y = 4$

d) $y = -3x - 9$

e) $x - 2y = 4$

f) $y + 2x = -5$

g) $2y - x = 4$

h) $y = 2x - y$

18. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados, y graficarla:

a) $A(2,5)\ y\ B(3,6)$
b) $A(-3,-2)\ y\ B(5,4)$
c) $A(2,3)\ y\ B(-2,3)$

19. Graficar y encontrar la ecuación de la recta dada la pendiente y un punto:

a) $(-1/2\ ,0),\ m = -1$

b) $(-3,4),\ m = -1/4$

c) $(0,2), m =$ ¾

d) $(1,1),\ m = 2$

e) $(3,-4),\ m = 4$

f) $(-2,3/2),\ m = 0$

20. Encontrar y graficar en un mismo gráfico las ecuaciones solicitadas:

a) Recta paralela a $y = 3x - 5$, y que pase por el punto $A(2,4)$
b) Recta perpendicular a $y = -x + 1$ y que pase por el punto $A(-2,-4)$
c) Recta paralela a la que pasa por los puntos $A(1,5)$ y $B(3,8)$ y que pasa por el punto $C(-1,1)$
d) Recta perpendicular a $y = 3x + 2$ y que pasa por $A(-5,-5)$

21. Graficar las siguientes funciones polinómicas de segundo grado cuyas raíces son números complejos:

a) $P(x) = x^2 + 1$

b) $P(x) = x^2 - 4x + 5$

c) $P(x) = -x^2 - 4$

d) $x^2 + 2x + 10$

22. Calcular el valor de la incógnita en cada una de las relaciones de proporcionalidad:

1	$\frac{3}{x}=\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{x}=\frac{7}{5}$	3	$\frac{x}{8}=\frac{2}{3}$
4	$\frac{6}{x}=2$	5	$\frac{4}{3}=\frac{x}{6}$	6	$\frac{1}{2}=\frac{4}{x}$
7	$\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$	8	$\frac{2x}{3}=4$	9	$\frac{5}{2x}=\frac{1}{10}$

23. Si $100\,metros$ de hilo metálico pesan $18\,kg$, ¿cuántos metros hay en $300\,kg$ de hilo metálico?, ¿y en 100 kg?

24. Si se desperdician 6251,4 kg de acero al tornear 23 ejes, ¿cuánto acero se desperdiciará al tornear 36 ejes?

25. Un ganadero tiene alimento suficiente para 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de alimento a 450 vacas?

26. El precio de 450 g de fundición gris es U$ 2,97. ¿Cuánto cuesta una pieza de la misma fundición que pesa 17,4 kg?

27. Un obrero de metal en láminas, tarda 2 horas en hacer 6 codos. ¿Cuántos codos hace en 3 horas? ¿Cuántas horas le lleva confeccionar 18 codos?

28. 10 hombres hacen una obra en 45 días. ¿Cuántos hombres se necesitarán para hacerla en 15 días? ¿Y en 90 días?

29. José marca 5 goles cada 25 minutos de partido. Calcular mediante una regla de tres, cuántos goles marcará en una hora. Indicar si es una proporcionalidad directa o inversa.

30. Un autobús recorre 70 km en dos horas. ¿Cuánto tardará en realizar un viaje de 345 km? Indicar si es una proporcionalidad directa o inversa.

31. El precio de un barril de 100 litros de petróleo es de 65€. ¿Cuál es el precio de 3 barriles de 75 litros?

32. Tres trabajadores recolectan 100 manzanos en 5 horas. Uno de ellos ha sufrido un accidente laboral y no puede continuar con su tarea. Calcular cuánto se tardará en recolectar los 300 manzanos restantes entre los dos trabajadores activos.

33. Un edificio es pintado por 12 obreros en 15 días. ¿Cuántos días emplearán 20 obreros en pintar el mismo edificio?

34. Marta tarda 5 minutos en ir a de su casa al colegio en bicicleta a una media de 6 km/hora. ¿Cuánto tardará cuando va andando si su velocidad es de 4 km/h?

3. TRABAJO PRÁCTICO: **ECUACIONES DE PRIMER GRADO**

1. Hallar el valor de la variable que satisface las siguientes ecuaciones:

a. $9x + 9 + 3x = 15$

b. $2{,}5x + 0{,}5x = 1{,}5x + 1{,}5$

c. $2y - 3y + 4y - 5 = 6y - 7y + 15$

d. $15y - (3 - (4y + 4) - 57) = 2 - y$

e. $4t - (12t - 24) + 38t - 38 = 0$

f. $(6x + 2) \cdot (5x - 4) - 30(x - 1) = 34x + 106$

g. $6x^2 - 27x + 72 = 3x\,(2x + 3)$

h. $5(x - 7) + 7(x + 7) = 42$

i. $(2x - 5)(3x - 7) - (3x - 5)(2x - 7) + 30 = 5x$

j. $\frac{1}{2}(4x+6) = \frac{1}{5}(15x+20)$

k. $\frac{4x-6}{12} - \frac{3x-8}{4} = \frac{2x-9}{6} - \frac{x-4}{8}$

l. $\frac{5x^2-19x-6}{5} = \frac{7x^2-29x+6}{7}$

m. $1 - x^2 - \frac{3x+1}{2} = -\frac{x^2}{4} + 5x - \frac{3x^2}{4}$

n. $\frac{3x}{5} - 1 + \frac{3x}{2} - 5 = -\frac{9}{10}x$

o. $\frac{3x}{5} - 1 + \frac{3x}{2} - 5 = -\frac{9}{10}x$

p. $\frac{8x}{5} - \frac{3x}{2} + \frac{5x^2-3}{10} = \frac{2x^2-1}{4}$

2. Resolver e indicar para cada ecuación si es: *compatible* (determinada o indeterminada) o *incompatible*

a) $(s + 1)(3s + 1) = 3s^2 + 7s - 13$

b) $(x - 3)^2 - 24 = (x + 3)^2 - 24$

c) $\frac{t+3}{2} - 4 + \frac{1}{2}(t - 1) = (2 - t)^2 - 7 - t^2$

d) $\frac{x-3}{2}-\frac{1}{4}(2x+3)-x=(1+x)-\frac{5}{4}$

e) $\left[\left(\frac{x}{2}-1{,}5\right)x\right]\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{9}{4}\right)^2$

f) $\frac{t+3}{2}-4+\frac{1}{2}(t-1)=(2-t)^2-7-t^2$

g) $\frac{x-3}{2}-\frac{1}{4}(2x+3)-x=(1+x)-\frac{5}{4}$

h) $\left[\left(\frac{x}{2}-1{,}5\right)x\right]\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{9}{4}\right)^2$

3. Analizar que ocurre cuando:

a. $k=-8/5$, $4(3x)+5kx=3k+1+4x$

b. $k=4/3$, $3kx-x-3x=k-6$

4. Determina el valor de "k", para que la ecuación dada sea incompatible:

a. $-5x(-1/4+k)(1/4+k)=3(k/2-1)$

b. $2x(k-1)(k+1)=3(4k-1)$

c. Qué valores podría asumir "k", para que la ecuación anterior tenga solución única

5. Resolver las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{4}{x^2-9}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x+3}=2$

b) $\frac{5x}{(2x+5)^2}+\frac{3x-2}{4x^2-25}=0$

c) $\frac{24}{x^2-16}+\frac{5}{x+4}=\frac{3}{x-4}$

d) $\frac{x^2}{x^2+2x}=3$

e) $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}=(x+1)$

f) $\frac{3x}{x+7}-\frac{8}{5}=0$

g) $\frac{2x-5}{x+1}-\frac{3}{x^2+x}=0$

6. Se propone a continuación una serie de problemas cuyas condiciones pueden formularse en términos de ecuaciones lineales

a. Hallar un número sabiendo que:

1) Su duplo supera a su mitad en 9.
2) Su triple excede a su mitad en 15.
3) Da igual resultado si se le suma 5 que si se lo multiplica por 5.

b. ¿Cuál es el número cuya tercera parte sumada a su quinta parte es igual a 40? $Rta.: 75$

c. ¿De qué número ha de restarse 6/5 para que la diferencia sea igual a su quinta parte? $Rta.: 3/2$

d. Si a un número se lo multiplica por 3, al producto se le suma 5 y a la suma se la divide por 2, da igual que si se lo multiplica por 5, al producto se le sumara 4 y a la suma se la dividiera por 3. ¿Cuál es ese número?

e. Un padre tiene 30 años y su hijo 2 años. ¿Cuántos años deberán transcurrir para que el padre tenga 8 veces la edad del hijo? $Rta.: 2\ años$

f. Una persona gasta $1/3$ de su dinero y luego $2/5$ de lo que le queda; tiene aún $\$60$. ¿Cuánto tenía al principio? $Rta.: 150$

g. La quinta parte de un número más 4 es igual a $1/3$ menos el duplo de dicho número. ¿Cuál es el número? $Rta.: -5/3$

h. Encontrar dos números pares consecutivos tales que dos veces el primero más tres veces el segundo, sea 76.

i. Pienso en un número, le sumo 5, este resultado lo multiplico por 3, y el nuevo resultado lo divido por 10. Obtengo así el 6. ¿Qué número pensé? $Rta.: 15$

j. Si a un número se le suma su tercera parte y a este resultado se le resta el mismo número aumentado en 5, se obtiene 1. ¿Cuál es dicho número? $Rta.: 18$

k. La mitad de un número, más la tercera parte de su consecutivo, más la octava parte de siguiente, es igual a este número. ¿Cuáles son los números? $Rta.: 14, 15, 16$

l. Un filatelista dice poseer un número de estampillas tal que triplicado y sumado a la mitad de su consecutivo es igual a 6122. ¿Cuántas estampillas tiene?

m. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuyo perímetro es $10\ cm$ mayor que el de un rectángulo de largo igual al lado del cuadrado y de ancho igual a $4\ cm$?

n. Las ruedas delanteras y las traseras de un cierto vehículo tienen $0{,}8\ m$ y $1{,}1\ m$ de diámetro respectivamente. Calcular la distancia recorrida si las ruedas delanteras dieron $450\ vueltas$ más que las traseras.

o. Una habitación es 3 veces más larga que ancha y tiene un perímetro de $96\ m$. ¿Cuáles serán sus medidas?

p. Un hombre vendió la tercera parte de sus naranjas más 6 naranjas. Luego se picaron la mitad de las que quedaban y 10 naranjas más, quedando 2 naranjas. ¿Cuántas naranjas tenía? $Rta.: 45\ naranjas$

q. Diez estudiantes compran una radio. Como cuatro de ellos no tienen dinero, los otros han de pagar $\$ 80$ más cada uno. ¿Cuánto cuesta la radio?

r. El precio de un artículo se aumentó en un quinto y resultó entonces el $0{,}75$ de $\$160$. ¿Cuál era su precio inicial?

s. El precio de un ventilador se rebaja un 20%. El ventilador se vende entonces a $\$480$, o sea, un 20% más que el precio de coste, ¿cuál es el precio de venta sin rebaja y el precio de coste?

t. Si el 50% de $\boldsymbol{x}$, más el 10% de $\boldsymbol{x}$ es el $12{,}5\%$ de 480, calcular $\boldsymbol{x}$.

u. Un padre tiene el doble de la edad de su hijo, y el doble de la suma de ambos es 120. ¿Qué edad tiene cada uno? $Rta.: P: 40\ años,\ \ H: 20\ años$

v. Un rectángulo es $2\ metros$ más ancho que un cierto cuadrado, $6\ metros$ más largo que él y tiene un área $84\ m^2$ mayor que la de dicho cuadrado. Hallar las dimensiones de las dos figuras.

$Rta.: A\ cuadrado\ 81m2\ , A\ rectángulo\ 165m2$

TRABAJO PRÁCTICO: ***SISTEMA DE ECUACIONES***

1. Resolver, clasificar y graficar, los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando diferentes métodos.

a. $\begin{cases} 3x-5y=13 \\ 2x+7y=81 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3y-4x=1 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 4x-6y=5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \sqrt{3}x-3y=\sqrt{3} \\ x-\sqrt{3}y=1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x-y=10-2x \\ 8x-2=2y \end{cases}$

f. $\begin{cases} \sqrt{5}x-5y=\sqrt{5} \\ x-\sqrt{5}y=5 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ -3x+2y+4=0 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 3x-6y+12=0 \end{cases}$

i. $\begin{cases} x-0{,}5y=1 \\ 4x-2y-4=0 \end{cases}$

2. Construir para cada caso el sistema de ecuaciones conociendo algunos datos:

a. La solución es $S=\{(2,1)\}$, siendo las pendientes de las rectas $m_1=1$ y $m_2=-2$

b. La solución es $S=\{(-3,0)\}$, siendo puntos de paso de cada una de las rectas, los puntos $P_1=(0,2)$ y $P_2=(2,-3)$ respectivamente.

c. La solución es $S=\{(1,1)\}$ siendo las raíces de las rectas $x_1=2$ y $x_2=-3$ respectivamente.

3. Determinar que en los casos siguientes se cortan las dos rectas dadas y hallar el punto de intersección:

a. $x+5y-35=0 \quad \cap \quad 3x+2y-27=0$

b. $14x+9y-24=0 \quad \cap \quad 7x-2y=17$

c. $15y+12x-8=0 \quad \cap \quad 16x-7=-9y$

d. $8x-33y-19=0 \quad \cap \quad 12x+55y-19=0$

e. $3x+5=0 \quad \cap \quad y-2=0$

4. Demostrar que en los casos siguientes son paralelas (\\ ) las dos rectas dadas:

a. $3x+5y-4=0 \quad \backslash\backslash \quad 6x+10y+7=0$

b. $2x-4y+3=0 \quad \backslash\backslash \quad x-2y=0$

c. $2x-1=0 \quad \backslash\backslash \quad x+3=0$

d. $y+3=0 \quad \backslash\backslash \quad 5y-7=0$

5. Demostrar que en los casos siguientes coinciden las dos rectas dadas:

a. $3x+5y-4=0 \quad \equiv \quad 6x+10y-8=0$

b. $x-\sqrt{2}y=0 \quad \equiv \quad \sqrt{2}x-2y=0$

c. $\sqrt{3}x-1=0 \quad \equiv \quad 3x-\sqrt{3}=0$

6. ¿Para qué valores de k los siguientes sistemas son compatibles determinados, incompatibles o indeterminados:

a. $\begin{cases} kx - y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -12x + ky = 1 \\ 3kx - y = 0{,}5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} k + 8 = kx - 4y \\ 2k + 4 = 4x - ky \end{cases}$

d. $\begin{cases} (k-2)x + ky = 1 \\ -5x + ky = -kx + 3y \end{cases}$

7. Encontrar la ecuación de una recta que pasa por $(3, -4)$ y tiene pendiente -2. Si la recta contiene a los puntos $(a, 8)$ y $(5, b)$; encuentre a y b.

8. Determinar para que valores de α y β las dos rectas:

$\alpha x - 2y - 1 = 0$ $\qquad\qquad$ $6x - 4y - \beta = 0$

a. tienen solución única,
b. tienen infinitas soluciones,
c. no tienen solución.
d. En cada caso, escriba el conjunto solución.

9. Encontrar la ecuación de una recta que pasa por $(3, -4)$ y tiene pendiente -2. Si la recta contiene a los puntos $(a, 8)$ y $(5, b)$; encuentre a y b.

10. Determinar para que valores de α y β las dos rectas:

$\alpha x - 2y - 1 = 0$ $\qquad\qquad$ $6x - 4y - \beta = 0$

e. tienen solución única,
f. tienen infinitas soluciones,
g. no tienen solución.
h. En cada caso, escriba el conjunto solución.

11. Se da el sistema: $\begin{cases} 2x + ay = 13 \\ x - y = -1 \end{cases}$

a. ¿Para qué valor de "a" la solución es $(2, 3)$?

b. ¿Para qué valor de "a" el sistema no tiene solución?

c. ¿Para qué valores de "a" el sistema tiene infinitas soluciones?

12. Determinar los valores de "a" y "b" para que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - ay = 1 \\ 6x + 4y = b \end{cases}$$

a. sea compatible determinado.

b. sea incompatible.

c. sea compatible indeterminado

13. Determinar el valor de "a" para que el sistema de ecuaciones sea equivalente.

$$\begin{cases} 13x + 2y = 0 \\ 5x + ay = 0 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de "a" que haga que el sistema sea incompatible

14. ¿Para qué valor (o valores) de k el siguiente sistema lineal es incompatible? ¿Qué significa eso geométricamente?

$$\begin{cases} kx - 2y = 0 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$$

15. ¿Para qué valor (o valores) de k las rectas del sistema anterior se cortan en el punto $(2, -2)$?

16. Se dispone de los siguientes datos de dos rectas L_1 y L_2

L_1: $m = 2$ $\quad$ $raíz = -1$

L_2: pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(-1, 3)$

a. ¿Podría decir si se cortan en algún punto?

b. En caso afirmativo, encuentre las coordenadas de dicho punto y realice la representación gráfica de las mismas.

17. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas: $2x - y + 1 = 0 \quad \wedge \quad 3x + 2y = 0$ y tiene pendiente 2.

18. Una recta pasa por la intersección de las rectas de ecuaciones: $7x - 2y = 0 \quad \wedge \quad 4x - y - 1 = 0$ y es perpendicular a la recta $3x + 8y - 10 = 0$ Determine su ecuación.

19. Pasa por el punto de intersección hallado en el problema anterior y es paralela a la recta: $2x + 8y - 10 = 0$.
Determine su ecuación.

20. Determinar para qué valores de m y n las dos rectas:

$$mx + 8y + n = 0 \quad \wedge \quad 2x + my - 1 = 0$$

a. Son paralelas.
b. Coinciden.
c. Son perpendiculares.

21. Se dan las ecuaciones de dos lados de un rectángulo:
$5x + 2y - 7 = 0 \quad \wedge \quad 5x + 2y - 36 = 0$
y la ecuación de una de sus diagonales:

$$3x + 7y - 10 = 0$$

Hallar las ecuaciones de los otros dos lados y de la otra diagonal.

22. Determinar para qué valor de m las dos rectas:

$$(m-1)x + my - 5 = 0 \qquad \wedge \qquad mx + (2m-1)y + 7 = 0$$

se cortan en un punto situado en el eje de las abscisas.

23. Sabiendo que $\log_2(x+2y) = 5$ y que $\log_2(x+y) = 3$. Se pide:

a. Determinar x e y

b. Hallar: $\log_2[(x+2y)(x+y)]$

24. La recta L es perpendicular a la recta M, y la recta M es perpendicular a la recta N. Las rectas L y N no coinciden entre sí.

a. ¿Cuál es la relación entre las pendientes de las rectas L y N?

b. ¿Cuántos puntos tienen en común las rectas L y N?

c. Si la recta L tiene una ecuación $y = mx + b$, escribir una ecuación para la recta N.

*Sistemas en **forma coloquial**: ¡A descubrir resultados!*

1. En una bicicletería hay entre bicicletas y triciclos, 23 vehículos. La cantidad de ruedas es de 49. ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay?

2. La suma de dos números es -42. El primero de ellos menos el segundo es 52. ¿Cuáles son los números? $Rta.: x = 5;\ y = -47$

3. La diferencia entre dos números es 16. Tres veces el mayor de ellos es nueve veces el más pequeño. ¿Cuáles son los números? $Rta.: x = 24;\ y = 8$

4. María es 3 años mayor que José y Juan es 5 años menor que María. ¿Puede José tener menos de 2 años? $Rta.: No$

5. Leonor y su hija festejan 32 y 1 año respectivamente. ¿Dentro de cuántos años la edad de Leonor será el doble de la de su hija? $Rta.: 30\ años$

6. La suma de dos números naturales es 98 y al dividir el mayor por el menor el cociente es 7 y el resto 10. ¿Cuáles son los números?

7. En el colegio algunas aulas tienen 30 bancos y otras 35. El colegio tiene en total 19 aulas y 630 bancos. ¿Cuántas aulas tienen 35 bancos? $Rta.: 12\ aulas$

8. Cuando pagaste una cuota de \$120 del viaje de estudios utilizaste 15 billetes de \$5 y \$10. ¿Cuántos billetes de cada denominación entregaste?
   $Rta.: 6\ billetes\ de\ \$5;\ 9\ billetes\ de\ \$10$

9. A una reunión asistieron 200 personas entre hombres y mujeres, habiendo pagado los hombres \$40 por cada entrada y las mujeres \$20. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había si en total recaudaron \$5860?

10. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°. Si el menor de los ángulos mide la mitad del mayor y 14° grados menos que el intermedio. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?

11. Un hotel de dos pisos tiene 54 habitaciones. Si las del primero duplican en número a las del segundo, ¿cuántas habitaciones tiene cada uno?

12. Lisandro es 8 años mayor que su hermana Chiara. Hace 4 años la edad de Chiara era 2/3 la de Lisandro. ¿Qué edad tienen cada uno de ellos? $Rta.: 20\ y\ 28$

13. Juan y Carlos son profesores de matemáticas. En total llevan 46 años dando clases. Hace dos años, Juan llevaba 2,5 veces los años que tenía Carlos como profesor. ¿Cuántos años llevan en la enseñanza cada uno de ellos? $Rta.: 32\ y\ 14$

14. El dígito de las decenas de un entero positivo de dos dígitos es 2 más que 3 veces el dígito de las unidades. Si los dígitos se intercambian, el nuevo número es 13 menos que la mitad del número dado. Averigua el entero dado. (Sugerencia: sea $x = dígito\ de\ las\ decenas$ e $y = dígito\ de\ las\ unidades$, entonces $10x + y$ es el número).
$Rta.: 82$

15. El perímetro de un rectángulo es $86\ cm$. El largo es $19\ cm$ más grande que el ancho. Calcular el largo y el ancho. $Rta.: l = 31,\ \ a = 12$

*4. TRABAJO PRÁCTICO: **TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA***

1. Convierta las siguientes medidas a radianes:

a. $-270°$ c. $789°$ **e.** $60°$

b. $585°\ 20'\ 45''$ d. $1025°$ **f.** $115°$

2. Convierta las siguientes medidas a grados:

a. $2\ rad$ c. $8\pi\ rad$ e. $-12\pi\ rad$

b. $\frac{5\pi}{4}\ rad$ d. $\frac{3\pi}{4}\ rad$ f. $\pi\ rad$

3. Calcular la longitud de los arcos cuyas amplitudes y radios son:

a. $\alpha = 4\ rad \quad r = 200\ cm$ d. $\alpha = 2\pi/3 \quad r = \pi\ cm$

b. $\alpha = 0{,}348\ rad \quad r = 5{,}3.10^{-3}\ m$ e. $\alpha = 28° \quad r = 1\ cm$

c. $\alpha = 45° \quad r = 1{,}8\ m$ f. $\alpha = 1{,}5\ rad \quad r = 54\ m$

4. ¿A cuántos grados sexagesimales equivales 1 $radián$?

5. Si un reloj marca las $5hs$, ¿Cuál es la medida en radianes del ángulo que forman las agujas?

6. La suma de los ángulos agudos de un rombo es $72°$. Calcular el valor de los ángulos obtusos en grados sexagesimales y en radianes.

7. En qué cuadrante se encuentra el lado terminal de cada uno de los siguientes ángulos:

a. $34°$ d. $-185°$ g. $495°$ j. $-45°$

b. $320°$ e. $60°$ h. $555°$ k. $855°$

c. $-120°$ f. $-135°$ i. $1348°$

8. Determine la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos

a. $(-3, 2)$ y $(7, -3)$

b. $(0, 0)$ y $(1, 3/4)$

c. $(-1, 5)$; $(0, 0)$

d. $(-1, 1)$; $(5/3, 1)$

9. Desde el punto $M(-2, 3)$ se ha dirigido hacia el eje OX un rayo de luz con una inclinación de un ángulo α. Se sabe que $tg\alpha = 3$. El rayo se ha reflejado del eje OX. Hallar las ecuaciones de las rectas en la que están los rayos incidente y reflejado.

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto:

a. $P(2,-3)$ b. $Q(0,0)$ c. $R(1,4)$ d. $S(-7,-5)$

y tiene una inclinación de:

a. $45°$ b. $135°$ c. $285°$ d. $245°$

11. Demostrar que los puntos $A(7,5)$, $B(2,3)$ y $C(6,-7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

12. Dadas las siguientes medidas de los tres lados de un triángulo, ¿cuáles de ellos son rectángulos?

a. $6;\ 7{,}5;\ 4{,}5$ b. $4;\ 8;\ 5$ c. $5;\ 13;\ 12$

13. Resolver los siguientes problemas utilizando triángulos rectángulos:

a. Una antena de $20\ m$ de altura, se encuentra sujeta por un cable de $35\ m$. Calcular la distancia existente entre la base de la antena y el extremo del cable

b. Calcular la altura que debe tener una escalera para que apoyada en una pared alcance una altura de $2{,}85\ m$, al formar con el plano del piso un ángulo de $1\ radián$.

c. La cuerda de un cometa forma un ángulo de $31°\ 40'$ con el nivel del piso y tiene una longitud de $455\ metros$. ¿A qué altura se encuentra el cometa? $Rta.: 239$

d. ¿Cuál es el ángulo de inclinación del sol cuando un objeto de $6\ m$ proyecta una sombra de $10{,}3\ m$? $Rta.: 30°\ 10'$

e. Una persona se encuentra a $120\ m$ de un árbol, y observa que la línea visual de la punta del árbol forma un ángulo de $32°$ con la horizontal. Calcula la altura del árbol sobre el nivel de sus ojos.

f. Un alambre de suspensión mide $13{,}6\ m$ de largo, y está sujeto a un poste a $6{,}5\ metros$ sobre el nivel del suelo. ¿Qué ángulo forma el alambre con el suelo?

g. Calcular la superficie de un triángulo isósceles de $151\ m$ de base, sabiendo que el ángulo opuesto a ella es de $105°12'40''$. $Rta.: 4357{,}29\ m^2$

14. Resolver cuando sea posible, los siguientes triángulos oblicuángulos (en todos los casos, las letras minúsculas representan el lado opuesto al ángulo del mismo nombre con letra mayúscula)

a. $\begin{cases} A = 33º \\ B = 55º \\ a = 1\text{m} \end{cases}$ b. $\begin{cases} a = 7\text{m} \\ b = 9\text{m} \\ C = 60º \end{cases}$ c. $\begin{cases} A = 45º \\ B = 30º \\ c = 2{,}5\text{m} \end{cases}$ d. $\begin{cases} a = 3\text{m} \\ b = 4\text{m} \\ c = 5\text{m} \end{cases}$

e. $\begin{cases} A = \pi/3 \\ B = \pi/6 \\ a = 1 \end{cases}$ f. $\begin{cases} a = 7\text{km} \\ b = 5\text{km} \\ B = 33º \end{cases}$ g. $\begin{cases} a = 13\text{km} \\ b = 15\text{km} \\ c = 14\text{km} \end{cases}$ h. $\begin{cases} b = 28\text{cm} \\ c = 19\text{cm} \\ C = 30º \end{cases}$

15. Y ahora algunos problemas:

a. Uno de los lados de un triángulo mide 12 y su ángulo opuesto mide $20°$. Si otro de los lados mide $10\ m$, hallar el resto de los elementos del triángulo.

b. Los lados de un triángulo miden a, $\frac{1}{2}a$ y $\frac{2}{3}a$. Hallar los ángulos.

c. Uno de los ángulos de un triángulo mide $0{,}5\ radianes$. Si los lados que forman dicho ángulo miden $8\ mm$ y $10\ mm$, hallar el resto de los elementos del triángulo.

d. Si se abren completamente un par de tijeras, la distancia entre los puntos de las dos hojas es de $10\ cm$. Calcular el ángulo que subtienden dichas hojas si su longitud es de $8\ cm$.

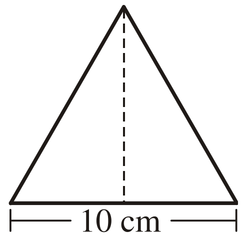
e. Desde un punto del suelo un observador ve que la visual a la punta de una torre forma con la horizontal un ángulo de $30°$. Cuando avanza $20\ m$ hacia la torre, dicho ángulo es de $45°$. Hallar la altura de la torre.

f. Dos puestos de observación A y B, separados por una distancia de $4\ km$, forman un triángulo con el pico de la montaña. Desde el puesto A, el ángulo entre el pico de la montaña y el puesto B es de $20°$, y desde el puesto B, el ángulo ente el pico y el puesto A es de $30°$. Calcular las distancias ente el pico y dada uno de los puestos de observación.

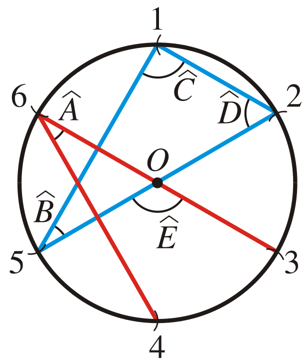
g. Juan va a cercar con alambre un terreno triangular, uno de cuyos lados mide $8{,}25\ m$ y otro de ellos mide $10{,}45\ m$. El ángulo comprendido entre ambos lados es de $110°$. ¿Cuántos metros de alambre necesitará Juan?

h. Dos barras rígidas de $4\ m$ y $5\ m$ se sujetarán de un punto fijo ubicado en el techo de un recinto, si las barras forman un ángulo de $120°$ entre sí, calcular la distancia entre los extremos de las mismas.

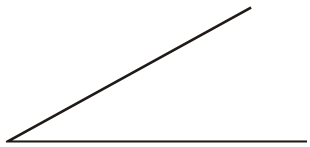
16. Calcula la altura y el área de este triángulo equilátero:



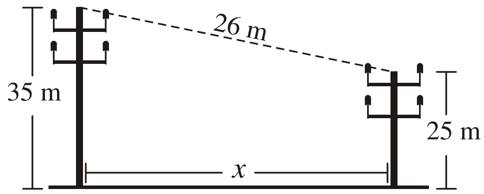
17. Calcula la medida de los ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ y $\hat{E}$, teniendo en cuenta que los puntos $1, 2, 3, 4, 5$ y 6 dividen a la circunferencia en seis partes iguales.



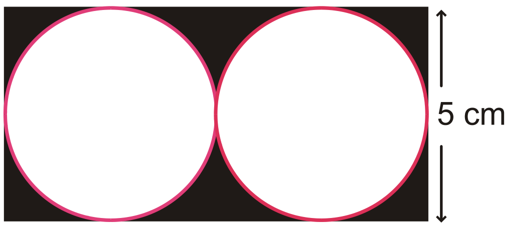
18. ¿Dónde debe estar situado el centro de una circunferencia para que sea tangente a estas dos semirrectas? Dibuja y justifica tu respuesta.



19. Se ha tendido un cable de $26\ m$ de longitud uniendo los extremos de dos torres metálicas cuyas alturas son $25\ m$ y $35\ m$, respectivamente. ¿Qué distancia separa los pies de ambas torres?



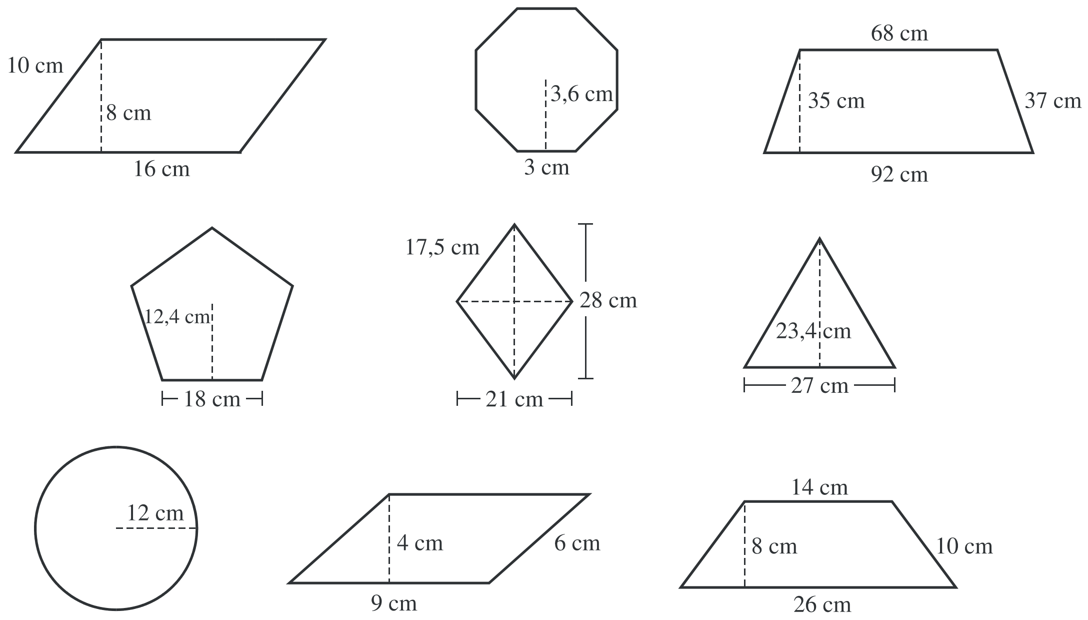
20. Calcular la superficie de la zona sombreada:



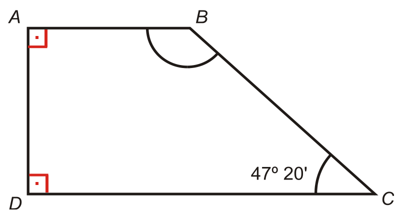
21. El lado de un triángulo equilátero mide $12\ cm$. ¿Cuál es su área?

22. La diagonal de un rectángulo mide $160\ cm$ y la base $120\ cm$. ¿Cuánto mide la altura?

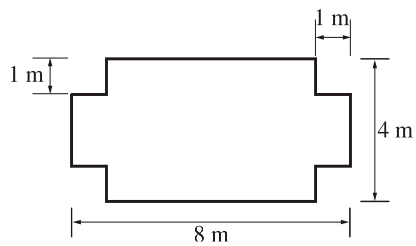
23. Calcula el perímetro y el área de estas figuras:



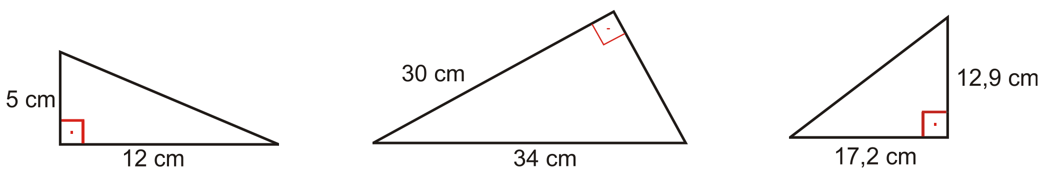
24. Calcula la medida del ángulo $\hat{B}$.



25. Calcula el perímetro y el área de la figura:

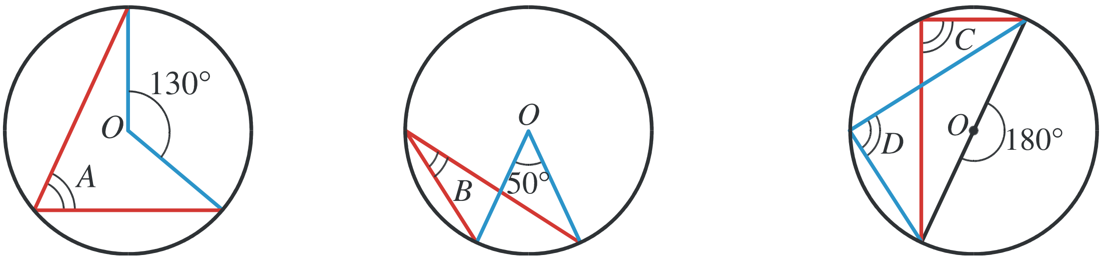


26. Calcula el lado que falta en estos triángulos rectángulos:

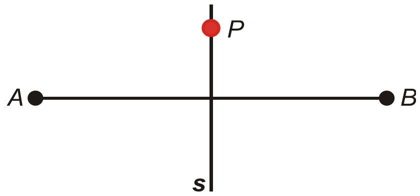


27. Las dos diagonales de un rombo miden 24 cm y 26 cm. Calcula su perímetro y su área.

28. Observa las figuras e indica cuál es la medida de los ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ y $\hat{D}$:



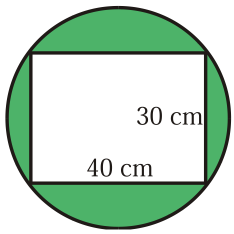
29. ¿Qué condiciones debe de cumplir un punto P para pertenecer a la mediatriz del segmento AB?



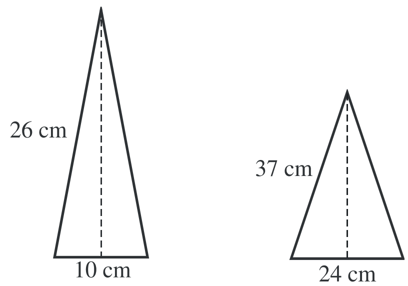
30. Justifica que la suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero es siempre 360°.

31. Para enlosar una habitación rectangular de $9\ m$ por $6\ m$ se utilizan baldosas cuadradas de $30\ cm$ de lado. ¿Cuántas baldosas son necesarias para cubrir el suelo de la habitación?

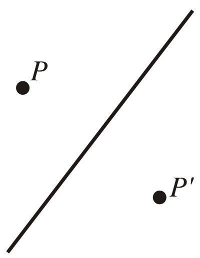
32. Calcula la superficie de la zona sombreada:



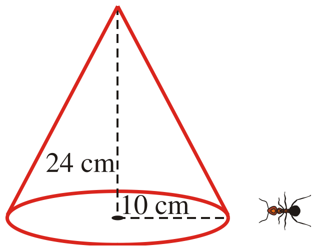
33. Calcula la altura en los siguientes triángulos isósceles:



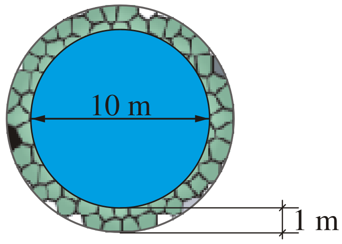
34. ¿Cómo comprobarías si el punto P es simétrico del punto P'? Razona tu respuesta.



35. Un cucurucho tiene forma de cono. El radio de la base del cono mide 10 cm y la altura 24 cm. ¿Cuál es la mínima distancia que ha de recorrer una hormiga para subir desde el suelo hasta el pico del cucurucho?



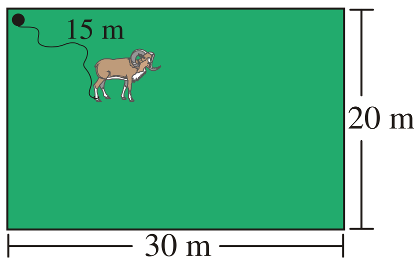
36. Una fuente circular está rodeada de un zócalo de mármol. El diámetro de la fuente es de 10 metros y el zócalo tiene un metro de ancho. ¿Cuál es la superficie recubierta por el mármol?



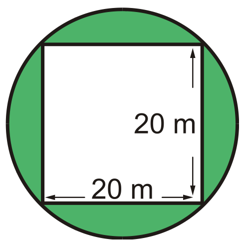
37. La diagonal de una piscina rectangular mide 25 m y el ancho es de 15 m. Calcula su perímetro y la superficie que ocupa.

38. Construye un triángulo de lados 10, 8 y 5 cm. y halla el punto de corte de sus mediatrices.

39. Se ha atado una cabra, con una cuerda de 15 m de longitud, en una de las esquinas de un prado rectangular de 20 ⍰ 30 m. Calcular la superficie del prado en el que puede pastar la cabra y la superficie del prado en la que no puede pastar.



40. Se ha construido una pista de patinaje cuadrada sobre un terreno circular, como indica la figura. El resto del terreno se ha sembrado de césped. Calcular: A) La superficie del terreno. B) La superficie de la pista. C) La superficie que queda con césped.



41. Calcula el área total de un cono de altura $24\ cm$ y radio $7\ cm$.
$R\colon\ A\,T = 703{,}36\ cm^2$.

42. Se quiere formar un tubo sin tapas con un rectángulo. ¿Qué área debe tener el rectángulo del cilindro si debe ser de $10\ cm$ de alto y $8\ cm$ de diámetro?
$R\colon\ 80\,\pi\ cm.$

43. La base de un prisma hexagonal es $16\ m^2$ y su volumen es $96\ m^3$ ¿Cuánto mide su altura?

$R: 6\ m.$

44. Una sala de clases mide $9\ m$ de largo, $6\ m$ de ancho y $2{,}5\ m$ de alto. Se desea que contenga $5\ m^3$ de aire por alumna ¿cuántas alumnas pueden recibirse en ella?

$R: 27\ \ alumnas.$

45. Determina el volumen del cuerpo geométrico que se forma al hacer girar un triángulo rectángulo sobre el cateto mayor, si la hipotenusa mide $13\ cm$ y el cateto menor mide $5\ cm$.

$R: V = 314\ cm^3$

46. Una caja de madera tiene forma de paralelepípedo recto de dimensiones: $25\ cm$ de largo, $10\ cm$ de ancho y $18\ cm$ de alto, en ella se guardan cajas de dulces de $5\ cm$ de largo, $5\ cm$ de ancho y $3\ cm$ de alto. ¿Cuántas cajas de dulces se pueden guardar?

$R: 60\ cajas.$

47. En un vaso cilíndrico, lleno de agua, de $5\ cm$ de radio y $10\ cm$ de altura introducimos una esfera de plomo de $5\ cm$ de radio. ¿Qué cantidad de agua queda en el vaso?

$R: 261{,}67\ cm^3$

48. Calcular el volumen de un depósito para almacenar trigo como el de la figura: